Übung zu "Numerical Methods in Astrophysics"

SS 2012 **Übung 6**

Aufgabe 6: Pseudo-Spektrale Methoden

Die Dynamik von inkompressiblen Flüssigkeiten kann durch die Navier-Stokes-Gleichung beschrieben werden

$$\partial_t \vec{u} + \nabla \cdot (\vec{u} : \vec{u}) = \nu \Delta \vec{u} - \nabla p \quad , \tag{1}$$

mit der Randbedingung

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad . \tag{2}$$

Auf Grund von schleppendem Fortschritt in einer nicht näher genannten Vorlesung können wir die Navier-Stokes-Gleichung leider noch nicht klassisch, unter Verwendung toller finite-Differenzen-Verfahren, lösen. Deshalb wollen wir im folgenden pseudospektrale Methoden verwenden. Dazu wird die gesamte Gleichung Fouriertransformiert, so dass aus der partiellen Differentialgleichung für $\vec{u}$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\tilde{\vec{u}}$ wird.

a) Überzeugen Sie sich davon, daß sich der Druck aus der Divergenz der Navier-Stokes-Gleichung zu

$$p = -\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}(u^\alpha u^\beta) \tag{3}$$

schreiben läßt und damit die fouriertransformierte Navier-Stokes Gleichung folgendermaßen aussieht

$$\frac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial t} = -ik_\gamma \left(\delta_{\alpha\beta} - \tfrac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)\left(\widetilde{u_\beta u_\gamma}\right) - \nu k^2 \tilde{u}_\alpha \tag{4}$$

b)

Nachdem die Badeenten es enlich geschafft haben Dr. Xilef samt seiner Tauchsieder aus dem Badeentenozean zu vertreiben, wollen sie diesen nun schnellstmöglich wieder homogen warm haben. Da ihnen, aus früheren Übungsaufgaben bekannt, reine Wärmediffusion viel zu langsam ist, beschließen sie ihren Ozean mal wieder richtug gut durchzupürieren. Denn nichts geht über einen fluffigen, frisch pürierten Ozean!
Dazu erzeugen die Badeenten zwei große Wirbel im Abstand Δ von der Mitte des Ozeans, und lassen die entstehende Turbulenz den ganzen Ozean durchquirlen.

Schreiben Sie eine zweidimensionale pseudospektrale Simulation. Beachten Sie dabei:

- Der Term $u^\alpha u^\beta$ muß im Realraum berechnet werden
- Die k Terme sind physikalische k. In numerischen Fouriertransformationen kommen die k-Werte von $0 \dots N-1$ vor, die den physikalischen k $0, 1 \cdots -2, -1$ entsprechen
- Nach jeder Fouriertransformation in den Fourierraum ist etwa die obere Hälfte des k-Raums durch Aliasing unbrauchbar und sollte 0 gesetzt werden

Wählen Sie die Stromfunktion

$$\begin{aligned}\vec{\Psi}(x,y) \;&=\; \vec{e}_z \Bigg(\exp(-(x - \frac{1}{2}L - \Delta)^2 - (y - \frac{1}{2}L - \Delta)^2) \\ &\qquad \pm \exp(-(x - \frac{1}{2}L + \Delta)^2 - (y - \frac{1}{2}L + \Delta)^2)\Bigg)\end{aligned} \tag{5}$$

als Anfangsdaten für Ihre Simulation. Dabei ist $\vec{u} = \nabla \times \vec{\Psi}$. Das Simulationsgebiet habe die Ausmaße $L \times L$.