

Übung zu “Numerical Methods in Astrophysics”

SS 2012

Übung 7

Aufgabe 7: Sod shock tube

Gegeben sei ein eindimensionales Rohr, gefüllt mit einem idealen Gas, das durch die Parameter ρ (Dichte), P (Druck), u (Fluss), e (Energie) und T (Temperatur) vollständig beschrieben wird. Sie verhalten sich gemäß der Euler-Gleichung (in Erhaltungs-Form):

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho u \\ P + \rho u^2 \\ (P + e)u \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

Hierbei setzt sich die Gesamtenergie eines Fluidelements aus kinetischer und innerer Energie zusammen:

$$e = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{3}{2}k_B T \quad (2)$$

Praktischerweise ist $k_B = 1$. Schön.

Anstatt einer adiabatischen Zustandsgleichung kommt diesmal die eines idealen Gases zum Einsatz:

$$P = \rho \frac{k_B}{m_0} T \quad \text{mit } m_0 = 1 \quad (3)$$

Am linken und rechten Ende des Rohrs seien feste Werte für diese Parameter vorgegeben.

$$\begin{pmatrix} \rho_L \\ u_L \\ T_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho_R \\ u_R \\ T_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.125 \\ 0. \\ 1.0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Zu Beginn der Simulation sei die gesamte linke bzw. rechte Hälfte des Rohrs mit dem jeweiligen Zustand gefüllt und durch eine Membran getrennt, die plötzlich entfernt wird - ein Shock bildet sich aus.

a) Linearisieren sie die Euler-Gleichung, so dass sie die Form

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial t} + \mathbf{A}(s) \frac{\partial \vec{s}}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

mit dem Zustandsvektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{pmatrix}$ annimmt.

Achtung: *Linearisieren* bedeutet nur, dass das Resultat linear in $\frac{\partial \vec{s}}{\partial x}$ ist, die Elemente der Matrix $\mathbf{A}(s)$ können durchaus nichtlinear von \vec{s} abhängen!

b) Simulieren sie das Sod Shock Tube Szenario mit Upwind-, Lax-Wendroff- und Leapfrog-Verfahren. Vergleichen sie numerische Diffusivität und Stabilität.

Bei der Erstellung dieses Übungsblatts wurden keine Badeenten gefährdet. Ausser die, die schon in dem Rohr steckten. Was suchen die da auch? Echtmal.