

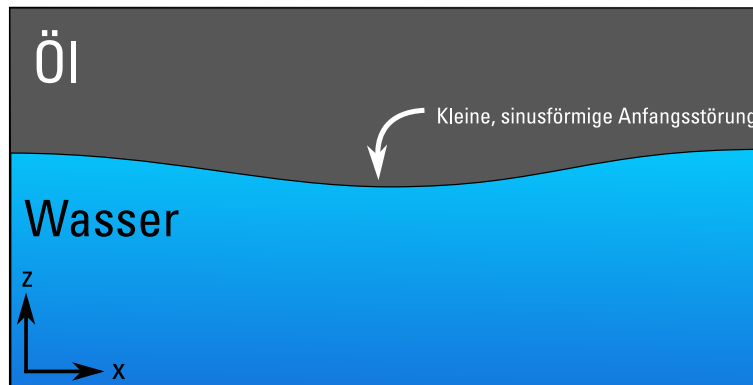
Übung zu “Numerical Methods in Astrophysics”

SS 2012

Übung 9

Aufgabe 9: Rayleigh-Taylor Instabilität

Der verrückte Wissenschaftler Dr. Xilef will wieder einmal den Badeenten an den Kragen gehen. Diesmal will er die Badeenten mit einer international erprobten Methode vergiften. Zu diesem Zwecke schüttet er eine große Menge (sehr schweres) Schweröl in den Badeentenozean, so dass sich eine Grenzschicht zwischen schwerem Öl oben, und leichterem Wasser unten ausbildet.



Was Dr. Xilef dabei nicht bedenkt: es entsteht eine Rayleigh-Taylor-Instabilität, die dazu führt, dass das gesamte Öl nach unten durch den Badeentenozean fällt, und stattdessen das Königreich der Unterseekrebse auslöscht. Die Badeenten schmunzeln.

a) Um die Konstruiertheit dieses Szenarios zu unterstreichen, simulieren wir das ganze mit der kompressiblen Navier-Stokes-Gleichung ($\rho = \rho(\mathbf{x})$):

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p + \eta\Delta\mathbf{v} + (\lambda + \eta)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{g} \quad (1)$$

mit $\rho_W = 1$, $\rho_{\text{Ö}} = 5$, $\lambda = -2/3 \cdot \eta$, $\eta \approx 1$ und $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$. Das System wird durch die Kontinuitätsgleichung, die Energieerhaltung und die Zustandsgleichung abgeschlossen:

$$\partial_t \rho + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (2)$$

$$\partial_t(\rho E) + \nabla(H\rho\mathbf{v}) = \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} \left(\sum_{i=1}^3 S_{ij} v_i \right) - \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}, \quad H = E + \frac{p}{\rho} \quad (3)$$

$$p = (\gamma - 1)e \quad E = e + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + h|g| \quad (4)$$

Verwenden sie hierzu die Godunov-Methode in 2 Dimensionen, mit periodischen Rändern in x -, sowie festen Rändern in z -Richtung.

b) Visualisieren sie die entstehende Rayleigh-Taylor-Instabilität. Beobachten sie, wie abhängig von der Gitterauflösung die Turbulenz unterschiedlich gut aufgelöst ist.